APPENDICE 2

DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE DI ORTOGONALITA'

La relazione di ortogonalità e' espressa dalla seguente espressione

$$S_r(D^a_{,r})^*_{,ji}(D^b_{,r})_{kl}=(g/g_a)d_{ab}d_{ki}d_{jl} \qquad \text{A2-1}$$

in cui g e' l'ordine del gruppo, g_a e' la dimensione della rappresentazione riducibile, $D^a_{,r}$ e $D^b_{,r}$ sono due matrici generiche che appartengono alla rappresentazione irriducibile G^a e G^b rispettivamente.

Per ottenere la formula precedente dobbiamo partire da un teorema molto importante che e' il **lemma di Schur** esso regola le relazioni tra le matrici di due rappresentazioni irriducibili.

Date due rappresentazioni irriducibili di un gruppo $G_a=(D^a_{,1},D^a_{,2},...,D^a_{,g})$ e $G_b=(D^b_{,1},D^b_{,2},...,D^b_{,g})$ o più in generale due collezioni di matrici irriducibili di dimensioni g_a e g_b con $g_b£g_a$ allora il lemma di Schur stabilisce che se esiste una matrice S di dimensioni $(g_b x g_a)$ tale che:

$$D^a_{,j}\, S = S\, D^b_{,j} \qquad \text{A2-2}$$

allora si possono verificare due casi

a) la matrice S e' una matrice che contiene tutti zero oppure

b) la matrice S è una matrice quadrata $(g_a=g_b)$ non singolare (cioè esiste l'elemento inverso).

Dimostrazione:

Per provare questo dobbiamo fare ricorso alle regole di moltiplicazione tra matrici, il procedimento può sembrare a prima visto macchinoso ma non offre nessuna difficoltà dal punto di vista concettuale. Scriviamo la matrice S come insieme di g_b vettori colonna s_j cioè

$$S=(|s_1|\ |s_2|\ ....\ |s_{gb}|) \qquad \text{A2-3}$$

quindi secondo la regola delle moltiplicazioni per matrici il primo membro a sinistra dell'uguaglianza può essere scritto:

$$D^a_{,j}S=(|D^a_{,j}s_1|\ |D^a_{,j}s_2|......|D^a_{,j}s_{gb}|) \qquad \text{A2-4}$$

infatti ogni colonna e' data dal prodotto di tutta la matrice $D^{a}{}_{,j}$ per la colonna corrispondente di S (il numero di colonne di $D^{a}{}_{,j}$ sono uguali al numero di righe di S cioè g_a).

Se noi scriviamo anche il termine di destra come insieme di vettori abbiamo che

$$SD^{b}{}_{,j}=\left(\left|\Sigma_l(D^{b}{}_{,j})_{l1}s_l\right|\ \left|\Sigma_l(D^{b}{}_{,j})_{l2}s_l\right|\ldots..\left|\Sigma_l(D^{b}{}_{,j})_{lg_b}s_l\right|\right) \qquad \text{A2-5}$$

cioè ogni vettore di S va moltiplicato in ordine per gli elementi di una colonna di D_j^b e quindi fatta la somma (in questo caso il numero di vettori di S cioè g_b e' uguale al numero di righe di D_j^b)

Quindi la condizione del lemma di Schur espressa per i vettori e'

$$D^{a}{}_{,j}s_k=\Sigma_l(D^{b}{}_{,j})_{lk}s_l \qquad \text{A2-6}$$

questo significa che l'azione della matrice $D^{a}{}_{,j}$ sul vettore s_k da come risultato un nuovo vettore che e' la combinazione lineare degli stessi s_k quindi l'insieme di questi vettori (g_b) costituisce un sottospazio invariante di dimensioni $g_b \leq g_a$.

Poiché le matrici $D^{a}{}_{,j}$ sono membri di una rappresentazione irriducibile di dimensioni g_a esse rappresentano l'azione di operazioni di simmetria su di una base di dimensioni g_a che non ammette sottospazi invarianti per cui g_a e g_b debbono coincidere e quindi S e' una matrice quadrata e non singolare (cioè il determinante e' diverso da zero per cui esiste anche la matrice inversa).

In caso contrario deve essere per forza S=0.

Il **corollario** del lemma di Schur dice che se una matrice S commuta con tutti i membri di una rappresentazione irriducibile cioè

$$D^{a}{}_{,j}\,S=S\,D^{a}{}_{,j} \qquad \text{A2-7}$$

allora deve essere

$$\mathbf{S},^{\wedge}=\lambda\mathbf{E},^{\wedge} \qquad \text{A2-8}$$

cioè una matrice scalare in cui λ e' uno scalare ed $\mathbf{E},^{\wedge}$ e' la matrice unita'.

A questo punto possiamo dimostrare che come conseguenza del lemma di Schur la matrice $\mathbf{S},^{\wedge}$ può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{S},^{\wedge}=,\,,^{r},\Sigma(\mathbf{D},^{\wedge a}{}_{,r})^{-1}\mathbf{M},^{\wedge}\mathbf{D},^{\wedge b}{}_{,r} \qquad \text{A2-9}$$

in cui $\hat{\mathbf{M}}$ e' una matrice arbitraria di dimensioni $g_a * g_b$ e la sommatoria va fatta su tutte le matrici della rappresentazione.

Dimostrazione:

Moltiplicando entrambi i membri della precedente uguaglianza per $\hat{\mathbf{D}}^a_k$ e moltiplicando l'elemento di destra a destra per $\hat{\mathbf{E}}=(\hat{\mathbf{D}}^b_k)^{-1}\hat{\mathbf{D}}^b_k$ abbiamo:

$$(\hat{\mathbf{D}}^a_k)\hat{\mathbf{S}}=\hat{\mathbf{D}}^a_k \sum_r (\hat{\mathbf{D}}^a_r)^{-1}\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{D}}^b_r(\hat{\mathbf{D}}^b_k)^{-1}\hat{\mathbf{D}}^b_k=\sum_i(\hat{\mathbf{D}}^a_i)^{-1}\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{D}}^b_i\hat{\mathbf{D}}^b_k=\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{D}}^b_k \qquad \text{A2-10}$$

infatti il prodotto $\hat{\mathbf{D}}^a_k(\hat{\mathbf{D}}^a_r)^{-1}=(\hat{\mathbf{D}}^a_i)^{-1}$ ed il prodotto $\hat{\mathbf{D}}^b_r(\hat{\mathbf{D}}^b_k)^{-1}=(\hat{\mathbf{D}}^b_i)^{-1}$ sono sono sempre matrici corrispondenti delle due rappresentazioni e l'indice i corre su tutto il gruppo come l'indice r.

La matrice $\hat{\mathbf{S}}$ scritta nel modo precedente quindi soddisfa il lemma di Schur.

Possiamo a questo punto applicare il lemma di Schur ed analizzare le due possibilità :

a) nel primo caso $g_a \neq g_b$ quindi $\hat{\mathbf{S}}=0$ perciò l'elemento S_{ij} dalla A2-9 e' dato da:

$$S_{ij}=\sum_r \sum_{pq}(D^a_r)^{-1}{}_{ip}M_{pq}(D^b_r)_{ql}=0 \qquad \text{A2-11}$$

in cui gli indici p,i assumono valori sino a g_a mentre q,l sino a g_b.

Poiché $\hat{\mathbf{M}}$ e' arbitraria possiamo prenderla con tutti zeri tranne l'elemento $M_{jk}=1$(cioè per p=j e q=k) in questo caso la precedente equazione diventa:

$$\sum_r (D^a_r)^{-1}{}_{ij}(D^b_r)_{kl}=0 \qquad \text{A2-12}$$

b) nel secondo caso $g_a=g_b$. Se le due rappresentazioni G_ae G_b non sono equivalenti allora non c'e' nessuna trasformazione di similarità che trasforma l'una nell'altra per cui nella espressione A2-9 è $\hat{\mathbf{S}}=0$.

Se invece sono le due rappresentazioni sono equivalenti allora possiamo trovare sempre una trasformazione di similarità per cui esse sono uguali, quindi avremo la relazione

$$\hat{\mathbf{D}}^a_k\hat{\mathbf{S}}=\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{D}}^a_k \qquad \text{A2-13}$$

Cioè $\hat{\mathbf{S}}$ commuta con tutte le matrici; per questa ragione in conseguenza del corollario del lemma di Schur deve essere una matrice scalare cioè $\hat{\mathbf{S}}=\lambda\hat{\mathbf{E}}$ da cui

$$S_{il}=,S,_{r}\,,S,_{pq}(D^{a},_{r})^{-1},_{ip}M_{pq}(D^{b},_{r}),_{ql}=ld_{il} \qquad \text{A2-14}$$

ed assumendo come in precedenza che tutti gli elementi di **M**,^ siano uguali a zero tranne $M_{jk}=1$ quindi abbiamo

$$S_{il}=,S,_{r}\,(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}(D^{a},_{r}),_{kl}=ld_{il} \qquad \text{A2-15}$$

Nella formula precedente la somma va fatta su tutte le matrici R della rappresentazione . Ma la matrice **S**,^ ha elementi solo lungo la diagonale e sono g_a quindi possiamo prendere gli elementi con i=l e sommarli da cui otterremo lg_a quindi

$$lg_{a}=,S,_{i},S,_{r}\,(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}(D^{a},_{r}),_{ki}=,S,_{r},S,_{i}\,(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}(D^{a},_{r}),_{ki} \qquad \text{A2-16}$$

nella sommatoria interna il primo termine rappresenta la colonna j mentre il secondo termine rappresenta la riga k; sappiamo pero' che il prodotto di una matrice per la sua inversa da la matrice **E**,^ per cui il prodotto della riga k per la colonna j della matrice **D**,$^{\wedge a}$$,_{r}$ e' uguale a d_{kj} per cui

$$d_{kj}=lg_{a} \qquad \text{A2-17}$$

e quindi

$$l=(g/g_{a})d_{kj} \qquad \text{A2-18}$$

$$,S,_{r}\,(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}(D^{a},_{r}),_{kl}=(g/g_{a})d_{il}d_{kj} \qquad \text{A2-19}$$

combinando quest'ultima con la 1.187 abbiamo

$$,S,_{r}\,(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}(D^{b},_{r}),_{kl}=(g/g_{a})d_{il}d_{kj}d_{ab} \qquad \text{A2-20}$$

Se le matrici sono unitarie abbiamo che $(D^{a},_{r})^{-1},_{ij}=(D^{a},_{r})^{*},_{ji}$ per cui la precedente diventa la relazione di ortogonalità che volevamo dimostrare cioè

$$S_{r}(D^{a},_{r})^{*},_{ji}(D^{b},_{r})_{kl}=(g/g_{a})d_{ab}d_{ki}d_{jl.} \qquad \text{A2-21}$$