APPENDICE I

RIEPILOGO DI ALGEBRA CALCOLO MATRICIALE E CALCOLO VETTORIALE

A) DEFINIZIONI

Un insieme di elementi propriamente arrangiati in un reticolo di dimensioni mxn e' chiamato matrice. Ci limiteremo a parlare di matrici quadrate anche se in alcuni casi faremo esplicitamente richiamo a matrici non quadrate per definirne ad esempio le regole di moltiplicazione.

Una matrice quindi di dimensione n si indica con

$$\left(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...a_{1n},a_{21}\ a_{22}\ a_{23}...a_{2n},.,.,a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}...a_{nn}\right)$$

A1

il numero a_{ij} e' l'elemento di matrice che appartiene alla riga i ed alla colonna j del reticolo. Considereremo matrici con elementi che possono essere numeri complessi. Le matrici saranno indicate con accenti circonflessi e lettere in grassetto ad esempio

$$\mathbf{H},\hat{}\,,\mathbf{s},\hat{}\,\mathbf{1}$$

Il simbolo **1** e' riservato alla matrice unita' che ha la seguente forma qualunque sia la sua dimensione

$$(1\ 00...0,0\ 1\ 0...0,0\ 0\ 1...0,.,.,0\ 0\ 0...1)$$

Gli elementi della matrice **1** sono dati dal delta di Kronecker

$$d_{ij} \qquad A2$$

Che equivale ad 1 se $i=j$ altrimenti e' uguale a zero.

La somma di due matrici

$$\mathbf{A},\hat{}+\mathbf{B},\hat{}=\mathbf{C},\hat{} \qquad A3$$

e' ottenuta dall'addizione dei corrispondenti elementi

$$C_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \qquad \textit{A3}$$

ed analogamente per la sottrazione. Una matrice puo' essere moltiplicata per uno scalare (numero)

$$\mathbf{D},\hat{}=l\mathbf{A},\hat{} \qquad A4$$

moltiplicando ogni elemento della matrice per l

$$D_{ij}=l\ A_{ij} \qquad A5$$

Le proprieta' associativa e distributiva delle addizioni valgono rispetto alla moltiplicazione per uno o piu' scalari.

B) PRODOTTO DI MATRICI

Il prodotto di due matrici **A**,^ e **B**,^ e' un'altra matrice **D**,^

$$\mathbf{A},\hat{}\mathbf{B},\hat{}=\mathbf{D},\hat{} \qquad A6$$

in cui gli elementi della matrice **D**,^ sono dati da

$$D_{ij}=,S,_{k}A_{ik}B_{kj} \qquad A7$$

Consideriamo una terna di assi cartesiani destrorsa e fissiamo su di esssi tre vettori unitari $\underline{\mathbf{i}}$,$\underline{\mathbf{j}}$, $\underline{\mathbf{k}}$, . Dato un qualsiasi vettore **r** esso e' determinato dalle sue componenti

$\underline{\mathbf{r}}$= x$\underline{\mathbf{i}}$ +y$\underline{\mathbf{j}}$ +z$\underline{\mathbf{k}}$

la somma di due vettori si fa con la regola del parallelogramma; dati due vettori $\underline{\mathbf{a}}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\underline{\mathbf{b}}=(x_2,y_2,z_2)$ il vettore somma e'

$$(\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}})=(x_1+x_2)\underline{\mathbf{i}} +(y_1+y_2)\underline{\mathbf{j}} +(z_1+z_2)\underline{\mathbf{i}}$$

cioe' la somma di due vettori si fa sommando le componenti, analogamente si fa per la sottrazione.

L'origine e' il vettore nullo.

Vediamo i vari tipi di prodotto:

1) Prodotto scalare **a.b**=|a||b|cos

Teoria dei Gruppi

La teoria dei gruppi viene ampiamente utilizzata in meccanica quantistica ed in spettroscopia. Attraverso di essa si studiano i gruppi di simmetria della molecola e si trovano delle relazioni utili che collegano bvari elementi di matirice e quindi utilizzabili per studiare le interazioni tra i vari stati.

Definizione:

Data una serie di elementi essi costituiscono un insieme che si indica

{A,B,C,...R} e che si definisce gruppo.

Gli elementi possono essere di qualunque tipo es numeri, matrici , operazioni di simmetria ecc. Un insieme puo' contenere anche un unico elemento e si indica con {R}.

Definito un gruppo occorre definire una legge di combinazione tra i vari elementi del gruppo stesso per cui presi due elementi del gruppo R ed S li combiniamo insieme ed otteniamo l'elemento T. Tale operazione si indica con R S =T.

Vediamo come deve essere questa legge di combinazione tramite tre esempi:

a) Consideriamo l'insieme dei numeri naturali e come legge di combinazione usiamo l'addizione:

{1,2,3,4...}   addizione R+S=T

In questo caso questa legge gode dele seguenti proprieta'

1) associativa :   [(R+S)+T]=[R+(S+T)]

2) Commutativa: R+S=S+R

3)Chiusura: il risultato T fa parte dell'insieme (in questo caso dei numeri naturali).

b) consideramo per il secondo esempio sempre l'insieme dei numeri naturali ma prendiamo come legge di combinazione il prodotto R S=T

anche questa legge gode delle tre proprieta' suddette, cioe' la commutativa, la dissociativa e la chiusura.

c) consideriamo come terzo esempio le operazioni di simmetria su di una lamina triangolare equilatera e cioe' consideramo tutte le operazioni che la portano a coincidere con se stessa. (prendiamo su di essa un punto di riferimento)

le operazioni possibili sono:

E= identita'

C_3= rotazione di 120 °°in senso antiorario intorno all'asse

perpendicolare al foglio e passante per il centro.

C_3= rotazione di 120° in senso orario

S_1= riflessione sul piano $s^{(1)}$

S_2=riflessione sul piano $s^{(2)}$

S_3= riflessione sul piano $s^{(3)}$

Queste operazioni sono tutte distinte e sono le sole che portano a coincidere la lamina con se stessa. Queste operazioni costituiscono un (gruppo) insieme e si indicano con $\{E, C_3, C_3, s^{(1)}, s^{(2)} s^{(3)}\}$

Si puo' definire una legge di combinazione tra questi elementi $C_3\, s^{(1)}$ in cui si esegue prima l'operazione scritta a destra $s^{(1)}$ e poi quella a sinistra C_3 e si vede che l'effetto finale e' $s^{(3)}$ cioe'

$C_3\, s^{(1)}=s^{(3)}$ ed anche $s^{(1)}C_3=s^{(2)}$

come si puo' notare esiste sempre l'effetto di chiusuara ma la legge non e' commutativa.

Si definisce quindi come gruppo un insieme che gode delle seguenti proprieta':

1) Legge di combinazione associativa $[(R+S)+T]=[R+(S+T)]$

2) legge di chiusura R S=T con T appartenete al gruppo

3) Esistenza dell'elemento unita' che lascia inalterato tutti gli elementi

$R\,E=E\,R=R$

4) Qualunque si R esiste sempre l'elemento inverso R^{-1} tale che $R\,R^{-1}=E$

Vediamo ora alcuni esempi

a) I numeri naturali (addizione) soddisfano soltanto la prima proprieta', con lo zero anche la seconda e la terza.

b) i Numeri interi positivi e negativi sono un gruppo

c) i numeri interi rispetto al prodotto soddisfano solo le prime tre proprieta'

d) I numeri razionali (escluso lo zero) sono un gruppo per la moltiplicazione

e) operazioni di simmetria della lamina triangolare sono un gruppo.

Vediamo allora lacuni commenti

1) l'elemento identita' e' unico.

Questa affermazione come tutte le altre si dimostra per assurdo: infatti ammettiamo che esista un elemento S=,/ E che sia anche esso elemento unita'

$SR=R$ moltiplicnado a destra e entrambi i membri per R^{-1}

$S(RR^{-1})=(RR^{-1})$ da cui $SE=E$ cioe' $S=E$ che e' contro l'ipotesi

2) si puo' vedere che l'immagini puo' essere moltiplicata da destra o da sinistra e si ottiene lo stesso risultato:

se $RR^{-1}=E$ allora anche $R^{-1}R=E$

infatti ammettiamo che non sia vero quindi $R^{-1}R=S$ moltiplichiamo a destra per R^{-1} e si ottiene $R^{-1}RR^{-1}=SR^{-1}$ quindi $ER^{-1}=SR^{-1}$ cioe' $R^{-1}=SR^{-1}$ da cui $S=E$

3)R^{-1} e' unico infatti ammettiamo che ci sia un altro elemento S per cui $RS=E$ allora moltiplicando a sinistra per R^{-1} si ha $R^{-1}RS=R^{-1}$ quindi $S=R^{-1}$.

Gruppi astratti e tabella di moltiplicazione.

Il numero di elementi di un gruppo rappresenta l'ordine di un gruppo. con g si indica l'ordine del gruppo G; l'ordine puo' essere finito od infinito.

Se l'ordine del gruppo e' g allora il numero di prodotti che si possono ottenere combinando a due a due tutti gli elementi del gruppo e' g^2 infatti

1*g,2*g,3*g,..g*g

Questi prodotti si possono sistemare in una tabella detta tabella di moltiplicazione che ci sommarizza le proprieta' del grupp.

Consideriamo il gruppo {1,-1} in cui g=2 e scegliamo come legge di combinazione il prodotto allora si puo' costruire la seguente tabella di moltiplicazione

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

questi sono i prodotti a due a due e sono 4 cioe' g^2

Consideriamo l'altro gruppo G_2{1,-1,i,-i} la tabella di moltiplicazione e' la seguente

RS si trova all'intersezione della riga R e la colonna S

L'importanza della tabella di moltiplicazione e' data dal fatto che se conosciamo la tabella di moltiplicazione di un gruppo noi conosciamo tutte le proprieta' del gruppo stesso indipendentemente dal tipo di elemmenti contenuti nel gruppo stesso. Se due gruppi hanno la stessa tabella di moltiplicazione allora essi hanno le stesse proprieta'. Per questo noi possiamo definire un gruppo astratto e studiare le proprieta' con la tabella di moltiplicazione, poi possiamo attribuire quelle proprieta' a qiualsiasi gruppo reale che abbia la stessa tabella di moltiplicazione.

Come esempio prendiamo un gruppo astratto {A,B} con la seguente tabella dimoltiplicazione

	A	B
A	A	B
B	B	A

questo e' un gruppo astratto un gruppo reale che obbedisce alle stessee leggi si dice realizzazione di tale gruppo ci possono essere tante realizzazioni di tale gruppo studiando questo gruppo noi studiamo tutte le sue realizzazioni

una realizzazione e' data dal gruppo in cui si hanno le seguenti corrispondenze

A= 1

B=-1

Un altro esempio si ha considerando i gruppi {A,B,C,D} ed il gruppo {1,-1,i,-i} di cui di seguito riportiamo la tabella di moltiplicazione e le corrispondenze.

Quindi se troviamo un gruppo che ha la tabella di moltiplicazioone di un gruppo astratto esso ha anche le stesse proprieta'

Un altro esempio e' dato dalla tabella di moltiplicazione del gruppo C_{3v} in questo gruppo vi e' un caso particolare cioe' $s^{(1)-1}=s^{(1)}$

Una osservazione e' che in ogni riga (o colonna) ciascun elemento compare una sola volta infatti sia per assurdo che AB=C ed anche AD=C

moltiplicando le due equazioni a sinistar per A^{-1} si ha $B=A^{-1}C$ ed anche $D=A^{-1}C$ quindi B=D.

Questo vuol dire che se si moltiplica un elemento di un certo gruppo per un latro elemento il risultato e' unico, cioe' se noi moltiplichiamo due lementi A_i ed A_j per un certo elemento R, i risultati sono diversi

sia infatti per assurdo che $RA_i=RAj$ con $A_i=\backslash Aj$

allora $R^{-1}RA_i=R^{-1}RAj$ da cui $A_i=Aj$

Quindi moltiplicando tutti gli elementi di **G** per un elemento si riottengono tutti gli elementi in ordine diverso. Come caso particolare vi puo' essere che RG=G.

Gruppi ciclici:

Il prodotto di un elemento per se stesso si definisce come quadrato $RR=R^2$

Un gruppo puo' essere costituito da elementi che sono la potenza di un certo elemento R, cioe' tutti gli elementi del gruppo si ottengono da un unico elemento questo e' un gruppo particolare che si chiama gruppo ciclico e se esso e' un gruppo finito deve essere necessariamente $R^n=E$

Il gruppo ciclico gode della proprieta' commutativa

$R^sR^t=R^tR^s=R^{s,t}$ i gruppi ciclici obbediscono alle quattro proprieta' precedentente dette; nel caso della lamina triangolare le operazioni C_3, C_3, ed E costituiscono un gruppo ciclico infatti $C_3=120°$ $=C_3$; $C_3^2=240$ °$=C_3$; $C_3^3=360$ ° =E.

Generatori di un gruppo

Prendiamo il gruppo totale delle sei operazioni { $E,C_3,C_3,s^{(1)},s^{(2)},s^{(3)}$} e moltiplichiamoli tra di loro in tutti i modi possibili comprese anche le potenze. Si vede che tutti i termini si possono ottenere operando opportunamnete sui due elementi C_3 e $s^{(1)}$ questi due elementi si chiamano generatori del gruppo.

Un gruppo ciclico ha un solo generatore mentre gli altri hanno piu' di un generatore. Il gruppo della lamina triangolare lo chiamiamo C_{3v}.

Sottogruppi.

Puo' accadere che una parte degli elementi di un gruppo costituiscano da soli un gruppo allora si dice che il secondo e' sottogruppo del primo: un sottogruppo del gruppo C_{3v} e' dato dai gruppi $\{E,C_3,C_3\}$, $\{E,s^{(1)}\}$, $\{E, s^{(2)}\}$, $\{E, s^{(3)}\}$.

Vi e' una proprieta' importante per i sottogruppi:

dato un gruppo G ed un sottogruppo H di ordine rispettivamente g ed h allora si ha che il rapport $g/h=n$ in cui n e' un numero intero.

Vediamo la dimostrazione di questo tramite la scomposizione del gruppo.

Definizione di coset.

Per prima cosa definiamo il coset : dato un elemento R_1(operatore) che e' contenuto nel gruppo **G** ma non nel sottogruppo $\mathbf{H} =\{H_1, H_2,H_3,.....H_h\}$ e facciamo la seguente operazione $\mathbf{H}R_1=\{H_1R_1,H_2R_1,.....H_hR_1\}$ questo insieme si chiamo coset destro, esso ha h elementi ed in generale non e' un gruppo,il coset destro si puo' farecon qualsiasi elemento R che appartiene a **G** ma non ad **H**.

In modo analogo si puo' definire $R_1\mathbf{H}$ come coset sinistro.

In genere il coset destro e' diverso dal coset sinistro cioe' $R_1\mathbf{H}$=\$\mathbf{H}R_1$

Vi sono quattro proprieta' dei coset:

A) La prima proprieta' e' banale e cioe' che ciascun elemento di G e' contenuto o in H o inuno dei suoi coset.

B)Nessun elemento del gruppo **G** e' comune ad **H** e ad uno dei suoi coset infatti:

se $R_1H_i=H_j$ allora $R_1H_iH_i^{-1}=H_jH_i^{-1}$ per cui $R_1=H_jH_i^{-1}$ ma questo vuol dire che R_1 fa parte di **H** perche' tale gruppo gode della proprieta' di chiusura e quindi questo e' contro l'ipotesi originaria in cui R_1 non appartiene ad **H**. Quindi se il sottogruppo ha h elementi allora il coset ha h elementi distinti da quelli del sottogruppo.

C) Prendiamo due elementi del gruppo R_1=\$R_2$ e costruiamo i due coset $\mathbf{H}R_1$ ed $\mathbf{H}R_2$ confrontando i due coset si vede che o sono completamente uguali o sono completamente diversi; distinguiamo i due casi : se $R_1R_2^{-1}$ appartiene ad **H** allora i due coset sono uguali infatti in tal caso l'elemento $(R_1R_2^{-1})$ fa parte del sottogruppo **H** quindi $\mathbf{H}(R_1R_2^{-1})=\mathbf{H} =(\mathbf{H}R_1)R_2^{-1}$ moltiplicando a destra per R_2 si ottiene $\mathbf{H}R_1=\mathbf{H}R_2$.

Il secondo caso in cui $R_1R_2^{-1}$ non appartiene ad **H** e quindi i due coset sono completamente diversi si dimostra per assurdo se infatti e'

$H_iR_1=H_jR_2$ allora moltiplicando a destra per R_2^{-1} si ha
$H_iR_1R_2^{-1}=H_j$ che moltiplichiamo ancora a sinistra per H_i^{-1} per cui
$H_i^{-1}H_iR_1R_2^{-1}=H_i^{-1}H_j$ quindi $R_1R_2^{-1}=H_i^{-1}H_j$, ma questo e' assurdo perche' l'elemento di destra fa parte di **H** mentre quello di sinistra per ipotesi non fa parte di **H**.

D) In un coset un elemento compare una sola volta infatti dato $H_i=\backslash H_j$ se fosse $H_iR_1=H_jR_1$allora moltiplicando a destra per R_1^{-1} si avrebbe che $H_i=H_j$ che e' contro l'ipotesi.

Utilizzando la definizione di coset si puo' procedere alla scomposizione del gruppo cioe' dato un gruppo **G** di ordine g ed un sottogruppo **H** di ordine h si procede a fare tutti i coset di **H** finche' non si esauriscono tutti gli elementi del gruppo poiche' l'ordine del coset e' h e questa operazione andra' fatta n volte avremo allora che g=n*h come volevasi dimostrare per esempio per il gruppo $\mathbf{C_{3v}}$ consideriamo il sottogruppo **H**=$\{E,C_3,_3{}^2\}$ abbiamo che il gruppo **G=H**+**Hs**$^{(1)}$.

Classe.

Oltre al metodo precedente vi e' un altro modo per scomporre il gruppo prendiamo un R qualsiasi appartenente al gruppo e prendiamo inoltre un altro elemento A qualsiasi (puo' essere anche R=A) e facciamo la seguente operazione:

$R_1AR_1^{-1}=B_1$ l'elemento B_1 appartiene anch'esso al gruppo e si chiama coniugato di A, prendendo un altro R cioe' R_2 avremo $R_2AR_2^{-1}=B_2$ e cosi' di seguito con tutti gli altri elementi r del gruppo **G** avremo quindi un insiemi di elementi coniugati di A (B_1,B_2,....) che costituiscono una classe.

Prendiamo come esempio il gruppo $\mathbf{C_{3v}}$ =$\{$ E,C_3,C_3,$s^{(1)}$,$s^{(2)}$,$s^{(3)}\}$ e prendiamo tutti gli elementi coniugati di C_3 cioe' sia A=C_3 e prendiamo tutti gli altri elementi del gruppo

R=E	EC_3E^{-1}	$=C_3$	
R=C_3	$C_3C_3C_3^{-1}$	$=C_3$	perche' $C_3^{-1}=C_3^2$
R=C			

ecc.

quindi gli elementi $\{C_3,C_3^2\}$ costituiscono una classe

Facciamo lo stesso procedimento prendendo A=$s^{(1)}$

In questo caso abbiamo un'altra classe con un diverso numero di elementi e cioe' $\{s^{(1)},s^{(2)},s^{(3)}\}$

Se invece $A=E$ allora la classe e' $\{E\}$

Con gli altri elementi otteniamo sempre le stesse classi per cui il gruppo C_{3v} si divide in tre classi che a differenza dei coset hanno un numero diverso di elementi.

L'elemento unita' forma sempre una classe a se stessa.

Vi e' una relazione importante fra gli elementi di una classe e cioe' che essi sono coniugati tra di loro infatti gli elementi della classe B_i e B_j sono coniugati di A per costruzione quindi

$B_i=R_iAR_i^{-1}$ allora B_i er B_j sono coniugati tra di loro cioe' esiste un

$B_j=R_jAR_j^{-1}$ elemento S del gruppo tale che

$B_i=SB_jS^{-1}$ moltiplicando la seconda per R_j^{-1} a sinistra ed R_ja destra si ha

$R_j^{-1}B_jR_j=R_j^{-1}R_jAR_j^{-1}R_j=A$ perche' $R_j^{-1}R_j=E$

sostituendo il valore di A cosi' ottenuto nella prima abbiamo

$B_i=R_iR_J^{-1}B_jR_jR_i^{-1}$ e confrontandola col la terza abbiamo

$R_iR_J^{-1}= S$ che appartiene al gruppo ed anche

$R_jR_i^{-1}=S^{-1}$ che appartiene ugualmente al gruppo.

Gli elementi C_3 e C_3^2 sono coniugati tra di loro.

Sottogruppo coniugato.

Consideriamo il sottogruppo **H** di **G** **H**$=\{A_1,A_2,.....A_k\}$ nello stesso modo in cui abbiamo costruito il coniugato di un elemento possiamo costruire il sottogruppo coniugato di **H** rispetto all'elemento R cioe'

$R\mathbf{H}R^{-1}=\{RA_1R^{-1},RA_2R^{-1},....RA_kR^{-1}\}$ esso e' ancora un gruppo quindi e' un sottogruppo di **G** ed ha la stessa tabella di moltiplicazione di **H** infatti **H** gode della proprieta' di chiusura cioe' $H_iH_j=H_k$ quindi anche i corrispondenti elementi del sottogruppo coniugato godone della stessa proprieta' $RH_iR^{-1}\ RH_jR^{-1} =RH_kR^{-1}$.

Sottogruppo invariante

Si puo' avere un caso particolare cioe' che $R\mathbf{H}R^{-1}=\mathbf{H}$ per tutti gli elementi R di **G** allora **H** si chiama sottogruppo invariante per il $\mathbf{C_{3v}}$ il solo sottogruppo invariante e' $\{E, C_3, C_3^2\}$ es. $C_3C_3C_3^{-1}=C_3$; $s^{(1)}C_3s^{(1)-1}=C_3^2$.

Invece $\{E,s^{(1)}\}$ non e' invariante infatti $C_3s^{(1)}C_3^{-1}=s^{(2)}$.

Si e' visto che per i sottogruppi invarianti vale l'espressione $R\mathbf{H}R^{-1}=\mathbf{H}$, moltiplicando a destra per R si ha $R\mathbf{H}=\mathbf{H}R$ cioe' si definisce come invariante un sottogruppo **H** che commuta con tutti gli elementi del gruppo **G**.

Si definisce come Abeliano un gruppo in cui tutti gli elementi commutano, in un gruppo Abeliano tutti i sottogruppi sono invarianti.

Un sottogruppo di indice 2 (ci sono solo due coset) e' invariante

G=**H**+**H**S=**H**+S**H** da cui **H**S=S**H**.

Un sottogruppo invariante e' composto di classi complete (e viceversa se un insieme di classi costituisce un gruppo allora esso e' invariante) se H_i e' in **H** lo e' anche XH_iX^{-1} per ogni X cioe' la classe (es $\mathbf{C_{3v}}$).

<u>Gruppo fattore</u>

Prendiamo un gruppo **G** ed un sottogruppo invarinate **H** allora abbiamo che

$\mathbf{G}=\mathbf{H}R_1+\mathbf{H}R_2+\mathbf{H}R_3+.....+\mathbf{H}R_n$ e sia R_1=E il gruppo costituito dai precedenti elementi si chiama gruppo fattore infatti:

possiamo definire una legge di combinazione

$(\mathbf{H}R_j)(\mathbf{H}R_j)=(\mathbf{HH})(R_iR_j)=\mathbf{H}R_k$ poiche' $\mathbf{HH}=\mathbf{H}^2=\mathbf{H}$ ed $R_iR_j=R_k$

nel prodotto solo gli elementi diversi

Esiste l'elemento unita' che e' $\mathbf{H}R_1$ $(\mathbf{H}R_1\mathbf{H}R_j=\mathbf{H}R_j;\ \mathbf{H}R_j\mathbf{H}R_1=\mathbf{H}R_j)$

Esiste l'elemento inverso $\mathbf{H}R_i\mathbf{H}R_j^{-1}=\mathbf{H}^2RR^{-1}=\mathbf{H}$

se $\mathbf{H}R_i^{-1}$ non c'e' in questa forma e' senz'altro uguale ad un altro coset

Inoltre la legge di combinazione e' associativa.

Prendiamo per esempio ancora il gruppo $\mathbf{C_{3v}}$ con $\mathbf{H}=\{E,C_3,C_3^2\}$

per cui $\mathbf{G}=\mathbf{H}+\mathbf{H}S^{(1)}$ in cui **H** e' l'identita'

questo gruppo ha in particolare la stessa tabella di moltiplicazione del gruppo $\{E,s^{(1)}\}$

	E	$s^{(1)}$		**H**	$\mathbf{H}s^{(1)}$		A	B
E	E	$s^{(1)}$	**H**	**H**	$\mathbf{H}s^{(1)}$	A	A	B
$s^{(1)}$	$s^{(1)}$	E	$\mathbf{H}s^{(1)}$	$\mathbf{H}s^{(1)}$	**H**	B	B	A

Spiegazione : prendiamo un elemento di **H** (ad es. C_3) ed un elemento di $\mathbf{H}s^{(1)}$ (ad es. $S^{(1)}$) costruiamo la tabella di moltiplicazione e decidiamo che due elementi non sono distinti se appartengono allo stesso coset quindi abbiamo la stessa tabella di moltiplicazione del factor group.

Definizione di isomorfismo ed omomorfismoù

Prendiamo i du e gruppi C_{3v} e {1,-1} e stabiliamo le seguenti corrispondenze

E ----> 1 $s^{(1)}$ -> -1 in questo caso vi e' una corrispondenza 3:1

C_3-----> 1 $s^{(2)}$ -> -1

C_3^{-2}--->1 $s^{(3)}$ -> -1

Se consideriamo invece il gruppo C_{3v} ed il gruppo {1,1} vi e' una corrispondenza 6:1

i due gruppi hanno la stessa tabella di moltiplicazione e si dicono omomorfi.

Se invece tra due gruppi vi e' una corrispondenza 1:1 allora si dicono isomorfi.

Nei gruppi su citati ogni elemento di C_{3v} ha un corrispondente nel gruppo {1,-1}.

Quando si stabilisce questa corrispondenza si fa una mappa.

Lo stesso mapping 3:1 si aveva per il factor group $\{\mathbf{H},\mathbf{H}s^{(1)}\}$, o col gruppo $\{E,s^{(1)}\}$

Definizione da riguardare?.

Rappresentazioni.

Ad ogni elemento di un gruppo si puo' associare una matrice scegleiiendo come regola di moltiplicazione il prodottotra matrici; stabiliamo le seguenti corrispondenze

E	C_3	C_3^2	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$
1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6

Se questi gruppi hanno la stessa tabelle di moltiplicazione si dicono isomorfi infatti $C_3s^{(1)}=s^{(3)}$ ed anche $M_2M_4=M_6$

Noi abbiamo scritto tre rappresentazioni del gruppo, la rappresentazione e' un gruppo di numeri o di matrici isomorfo con il gruppo stesso, la condizione e' che abbiano la stessa tabella di moltiplicazione

RS=T ***RS=T***

A noi interessano le rappresentazioni dei gruppi vediamo come vengono fuori.

Vediamo una interpretazione geometrica, cioe' lo spazio vettoriale nello spazio a tre dimensioni.

Spazio vettoriale

Consideriamo uno spazio monodimensionale in tale dimensione possiamo definire un insieme di punti che noi interpretiamo come gruppo {na} per determinare un punto a occorre sapere il valore di n.

Nello spazio a tre dimensioni possiamo definire tre vettori di base rispetto ai quali possiamo determinare la posizione di qualsiasi punto questi vettori di base si chiamano $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{\underline{k}}$ e possiamo indicarli genericamente con e_1, e_2, e_3 per cui abbiamo il gruppo $\underline{\underline{e}}=\{e_1, e_2, e_3\}$ il vettore $\underline{\mathbf{r}} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{\underline{k}}$ lo stesso risultato si puo' ottenere utilizzando le matrici per una spazio a piu' dimensioni considerando la base come una matrice riga e le componenti del vettore come una matrice colonna la regola di moltiplicazione e' quella del prodotto di matrici

$\underline{\underline{\mathbf{e}}} = (e_1\ e_2\ e_3)$ ed $\underline{\mathbf{r}} = \left(r_1, r_2, r_3\right)$ per cui il vettore $\underline{\underline{r}}$ e' dato da

$\underline{\mathbf{r}} = \boxed{e_1\ e_2\ e_3}\ \boxed{r_1},\quad \boxed{r_2},\quad \boxed{r_3} \quad = r_1\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + r_2\underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 + r_3\underline{\underline{\mathbf{e}}}_3$

si puo' quindi esprimere quanto sopra con il prodotto di matrici

$$\underline{\mathbf{r}} = \underline{\underline{\mathbf{e}}}\ \underline{\mathbf{r}}$$

Vediamo ora cosa succede se noi cambiamo la base ,infatti il valore delle componenti dipende dalla base che noi utilizziamo infatti dalla base

$\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \{e_1\ e_2\ e_3\}$ noi andiamo alla base $\underline{\underline{\mathbf{e}}}' = \{e'_1\ e'_2\ e'_3\}$

anche in questo caso avremo che il vettore $\underline{\mathbf{r}}$ sara' uguale a

$\underline{\underline{\mathbf{r}}} = r'_1e'_1 + r'_2e'_2 + r'_3e'_3$

cioe' il vettore e' lo stesso ma sono cambiate le componenti.

In questo modo tutti i vettori della nuova base $\underline{\underline{\mathbf{e}}}'$ (cioe' e'_1, e'_2 ecc) si possono esprimere in funzione della vecchia base $\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \{e_1\ e_2\ ..e_n\}$ per esempio

$e'_1= e_1R_{11}+e_2R_{21}+.....+e_nR_{n1}$

$e'_2= e_1R_{12}+e_2R_{22}+.....+e_nR_{n2}$ eccetera, cosi tutti i valori R_n possono essere raccolti in una matrice

R,^

$=\left(R_{11}\ R_{12}\ R_{13}....R_{1n},R_{21}\ R_{22}\ R_{23}....R_{2n},R_{31}\ R_{32}\ R_{33}....R_{3n},.,.,R_{n1}\ R_{n2}\ R_{n3}....R_{nn},\right)$ e quindi avremo che la nuova base sara' data da **e**'=**e** **R,**^.

Prendiamo come esempio una base ortogonale cartesiana ed operiamo un cambiamento di base cioe' operiamo una rotazione intorno all'asse e_3 di un angolo t allora avremo che $e'_3=e_3$;

$e'_1=e_1\cos t +e_2\operatorname{sen} t$

$e'_2=-e_1\operatorname{sen} t +e_2\cos t$

quindi la matrice **R,**^ in questo caso sara'

R,^=**Errore.** per una rotazione in senso antiorario otteniamo sempre questa matrice quindi la nuova base sara' data dal seguente prodotto

$\left(e_1\ e_2\ e_3\right)=\left(e_1\ e_2\ e_3\right)$, , (cos t -sen t 0,sen t cos t 0,0 0 1) che possiamo scrivere **e**'=**e** **R,**^

questo quando si va dalla vecchia base alla nuova da **e** ad **e**', quando invece si va dalla nuova alla vecchia cioe' da **e**' ad **e** si avra' una relazione simile

e =**e**' **T,**^ in cui **T,**^ esprime la rotazione in senso opposto

Vediamo ora come si trova **T,**^; se applichiamo alla base alla base **e** prima l'operazione R e poi l'operazione T che corrispondono alle matrici **R**,^ e **T**,^ noi otteniamo sempre la stessa base **e** cioe' possiamo scrivere

e =**R**,^**T**,^ da cui **R**,^**T**,^=**E**,^ e quindi **R**,^ =**R**,^-1

cioe' la matrice **R**,^ e' la matrice inversa di **T**,^.

Quindi le due relazioni per il cambiamento di base sono

e'=**e** **R**,^ ed anche

e=**e**' **R**,^-1

Vediamo ora cosa accade alle componenti di un vettore quando operiamo una trsformazione di base: sia dato un vettore

r= **e** **r** = $\boxed{e_1\ e_2\ e_3}$ $\boxed{r_1}$, $\boxed{r_2}$, $\boxed{r_3}$

ora passiamo dalla base **e** alla base **e**' quindi **e**=**e**'**R**,^-1 sostituendo sopra abbiamo

r= **e**'**R**,^-1 quindi le nuove componenti di **r** saranno date da

r'=**R**,^-1**r**

Facciamo ora la rotazione del vettore e manteniamo fissa la base

(ciascuna operazione ci porta un vettore in un altro che e' la sua immagine)

quindi da un vettore $\underline{\underline{\mathbf{r}}}= \underline{\underline{\mathbf{e}}}\ \underline{\underline{\mathbf{r}}}$ facciamo la rotazione R e si va in $\underline{\underline{\mathbf{r}}}'$ e vogliamo trovare quest'ultimo. $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ ~> $\underline{\underline{\mathbf{r}}}'$ con R.

Se facciamo contemporaneamente la rotazione della base allora le componenti del vettore non cambiano perche' il sistema e' solidale mentre sara' cambiato il sistema di riferimento per cui

$\underline{\underline{\mathbf{r}}}'=\underline{\underline{\mathbf{e}}}'\ \underline{\underline{\mathbf{r}}}$ e sostituendo $\underline{\underline{\mathbf{e}}}'=\underline{\underline{\mathbf{e}}}\mathbf{R},^{\wedge}$ abbiamo

$\underline{\underline{\mathbf{r}}}'=\underline{\underline{\mathbf{e}}}\mathbf{R},^{\wedge}\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ cioe' $\underline{\underline{\mathbf{r}}}'=\mathbf{R},^{\wedge}\underline{\underline{\mathbf{r}}}$.

Quest'ultima relazione ci esprime al relazione tra le componenti del vettore prima e dopo la trasformazione.

Quindi ad una rotazione sia della base sia del vettore corrisponde una stessa matrice e le vecchie componenti una volta vengono moltiplicate da destra (per la base) ed una volta da sinistra (per il vettore): il discorso vale per qualsiasi trasformazione . Operando con l'operazione R sulla base e sul vettore si ha

R$\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ ~> $\underline{\underline{\mathbf{e}}}'=\underline{\underline{\mathbf{e}}}\ \mathbf{R},^{\wedge}$

R$\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ ~> $\underline{\underline{\mathbf{r}}}'=\mathbf{R},^{\wedge}\underline{\underline{\mathbf{r}}}$.

Mapping.

In generale possiamo dire che ad ogni trasformazione (operazione) puo' essere associata una matrice operazione matrice

A ~>$\mathbf{A},^{\wedge}$

B ~>$\mathbf{B},^{\wedge}$

R ~>$\mathbf{R},^{\wedge}$

per esempio nel gruppo della lamina triangolare vi erano sei operazioni; queste operazioni noi le possiamo interpretare come operazioni su di un vettore.

Scegliamo una certa base con un asse e_3 perpendicolare al piano della lamina e gli altri due diretti dal centro della lamina a due vertici e vediamo gli effetti delle sei operazioni su questa base: si vede che tali effetti sono gli stessi che si ottengono associando ad ognuna delle dei operazioni una certa matrice e cioe'

E $\quad C_3 \quad C_3^2 \quad S^{(1)} \quad S^{(2)} \quad S^{(3)}$

(1 0,0 1) (0 -1,1 -1) (-1 1,-1 0) (1 -1,0 -1)

(-1 0,-1 1) (0 1,1 0)

1 1 1 1 1 1

I vettori e_1 ed e_2 sono associati alle matrici bidimensionali mentre il vettore e_3 e' associato a quelle monodimensionali

Consideriamo infatti l'operazione C_3(rotazione antioraria) sulla lamina abbiamo che

$e_3'=e_3$ lo stesso risultato si ottiene usando le matrici cioe' la relazione

$e_1'=e_1$ $\underline{\underline{e}}'=\underline{\underline{e}}\mathbf{R},^\wedge$

$e_2'=-(e_2+e_1)$

infatti $e_3'=e_3 *1 = e_3$

$(e_1' \; e_2'), = (e_1 \; e_2), (0 \; -1,1 \; -1)=(e_2 \; -(e_1+e_2)),$ cioe' : $e_1'=e_2; \; e_2'=-e_1-e_2$

Se invece sciegliamo una base diversa la matrici che debbono essere associate alle operazioni sono diverse i; in questo caso avremo

E	C_3	$C_3{}^2$	$S^{(1)}$	$S^{(2)}$	$S^{(3)}$
(1 0,0 1)	**Errore.**	**Errore.**	**Errore.**	**Errore.**	**Errore.**
1	1	1	1	1	1

Le matrici hanno le stesse proprieta' di moltiplicazione delle operazioni

$C_3 \quad S^{(1)} = S^{(3)}$

Errore. **Errore.** = **Errore.**

Questo e' il modo in cui si ottengono le rappresentazioni.

Esse possono avere un significato geometrico ma non e' necessario: in genere si parla di spazio puramente formale (cioe' non geometrico).

Cambiando lo spazio si ottengono delle rappresentazioni diverse, come diverse sono le rappresentazioni che si ottengono cambiando la base; cosi' il numero di rappresentazioni che si possono ottenere sono infinite mentre e' piccolissimo ilnumero di rappresentazioni distinte (cioe' indipendenti).

Le operazioni se interpretate come mapping costituiscono un gruppo e le matrici associate hanno la stessa tabella di moltiplicazione. Quindi in uno spazio n-dimensionale cioe' definito da n entita' (vettori) indipendenti possiamo definire un mapping cioe' a ciascuna operazione e' associata una trasformazione lineare di queste entita' tra di loro.

Nell'esempio della lamina (C_{3v}) il vettore e_3 costituisce una rappresentazione in uno spazio monodimensionale infatti per quanto riguarda le operazioni abbiamo visto che RS=T vediamo se e' la stessa cosa per la matrici cioe' $\mathbf{R},^\wedge\mathbf{S},^\wedge=\mathbf{T},^\wedge$ quindi

abbiamo $RS\underline{\mathbf{r}} = RS\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\mathbf{r}} = R\underline{\underline{\mathbf{e}}}\mathbf{S},^\wedge\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{e}}\mathbf{R},^\wedge\mathbf{S},^\wedge\underline{\underline{r}}$

$RS\underline{\mathbf{r}} = T\underline{\mathbf{r}} = T\,\underline{\underline{\mathbf{e}}}\underline{\mathbf{r}} = \underline{\underline{\mathbf{e}}}\mathbf{T},^\wedge\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ essendo $\underline{\mathbf{r}}$ arbitrario si ha che

$\mathbf{R},^\wedge\mathbf{S},^\wedge=\mathbf{T},^\wedge$.

Vediamo ora la relazione che lega due rappresentazioni in uno stesso spazio ma con basi differenti.

Consideriamo come prima una base ortogonale ed una base con assi a 120 gradi

$\underline{\underline{e}}' = \underline{\underline{e}}\mathbf{T},^\wedge$ in questo caso abbiamo

$e_1 = e_1'$ ed e_2=**Errore.** e_2' - **Errore.** e_1' cioe' **Errore.** e_2' =**Errore.** $e_1' + e_2$ da cui

e_2'=**Errore.** e_1+**Errore.** e_2 possiamo quindi scribere le seguenti due matrici

T,^ =**Errore.** ed anche **Errore.**$^{-1}$=**Errore.**

Queste matrici possono essere trovate una dall'altra dalla relazione

A,^$^{-1}$=**Errore.**

L'operazione R sulla base **e** da la base **e**'=**e** **R**,^ mentre la stessa opeazione R sulla base **e**' da la base **e**''=**e**' **R**,^' quindi abbiamo

1) R**e** ~> **e**'=**e** **R**,^

2) R**e**' ~> **e**''=**e**' **R**,^'

ed inoltre le due basi sono legate dalla seguente relazione

e'=**eT**,^ operando su quest'ultima con R abbiamo

3) R **e**'=R **e** **T**,^= **e** **R**,^ **T**,^ poiche' R **e** = **e** **R**,^

sostituendio nella 3) la relazione **e** = **e**' **T**,^$^{-1}$ si ha che

R **e**'=...=**e**' **T**,^$^{-1}$ **R**,^ **T**,^ e confrontando con la 2) si ha che

R,^' = **T**,^$^{-1}$ **R**,^ **T**,^

questa espressione mette in relazione la matrice dell'operazione sulla nuova base con quella dell'operazione sulla vecchia base tramite la matrice di trasformazione **T**,^ fra le due basi.

Le rappresentazioni che sono legate dalla precedente relazione (cioe' differiscono solo per una differenza di base nello stesso spazio) si dice che sono legate da trasformazioni di similarita' : esse non differiscono in modo sostanziale.

Consideriamo come esempio sempre il C_{3v} nella base **e** l'operazioe C_3 ha la seguennte rappresentazione $\boxed{0\ -1,1\ -1}$ vogliamo trovare la rappresentazione nella nuova base ortogonale :

applichiamo la formula precedente

R,^' = **T**,^$^{-1}$ **R**,^ **T**,^

in cui **T**,^ e' definito precedentemente quindi abbiamo

R,^' = **T**,^$^{-1}$ **R**,^ **T**,^=**Errore. Errore. Errore.**=

Errore. **Errore.**=**Errore.**.

Abbiamo trovato quindi la matrice da associare all'operazione C_3 nella nuova base la relazione che abbiamo ora applicato si chiama **TRASFORAMAZIONE DI SIMILARITA']** . Queste rappresentazioni che danno trasformazioni diu similarita' sonop rappresentazioni equivalenti (cioe' se ne troviamo una possiamo trovare tutte le altre per combinazione) come abbiamo fatto precedentemente.

Cambiando la base le due rappresentazioni cambiano ma quello che rimane costante e' la traccia cioe' la somma degli elementi diagonali della matrice associata a quella data trasformazione.

Metrico

Abbiamo parlato precedentemente di vettori, ci chiediamo se siamo in grado di confrontare due vettori e di decidere tra i due quale e' il piu' lungo.

Per uno spazio unidimensionale la cosa e' semplice perche il vettore e' definito come n$\underline{\mathbf{r}}$ quindi e' n volte il vettore unitario $\underline{\mathbf{r}}$.

Abbiamo visto che il prodotto scalare tra due vettori in uno spazio cartesiano cioe' con base ortogonale e componenti reali e' dato da

$\underline{\mathbf{r}}\,\underline{\mathbf{s}}$ = r1s1 + r2s2 + r3s3

per definire la lunghezza di un vettore si fa il prodotto scalare del vettore per se stesso

$\underline{\mathbf{r}}\,\underline{\mathbf{r}}$ = r12+r22+r32 tale lunghezza e' un numero reale, se il vettore fosse a componenti complesse non otterrei piu' un numero reale la lunghezza o module del vettore e' la radice quadrata del prodotto precedente.

Vediamo ora cosa accade per uno spazio generico ed in particolare con componenti complesse. In tal caso per ottenere un numero reale dobbiamo moltiplicare ciascun componente per il complesso coniugato cioe'

$\underline{\mathbf{r}}$*$\underline{\mathbf{r}}$ =r1*r1+r2*r2+r3*r3

questo sempre se noi lavoriamo con una base ortogonale.

Supponiamo di avere una nuova base definita nel seguente modo

$\underline{\mathbf{e}}$+1=-($\underline{\mathbf{e}}$1+i$\underline{\mathbf{e}}$2)/$\sqrt{,2}$

$\underline{\mathbf{e}}$0 = $\underline{\mathbf{e}}$3

$\underline{\mathbf{e}}$-1 = ($\underline{\mathbf{e}}$1-i$\underline{\mathbf{e}}$2)/$\sqrt{,2}$

Abbiamo visto che la nuova base e' legata alla base originaria per mezzo di una matrice di rotazione

$\left(e_1'\ e_2'\ e_3'\right)=\left(e_1\ e_2\ e_3\right)$, , (cos t -sen t 0,sen t cos t 0,0 0 1)

da cui si hanno i seguenti valori

$\underline{\mathbf{e}}_1$' = cos t $\underline{\mathbf{e}}_1$ + sen t $\underline{\mathbf{e}}_2$

$\underline{\mathbf{e}}_2$' = -sen t $\underline{\mathbf{e}}_1$ + cos t $\underline{\mathbf{e}}_2$

vediamo quindi cosa e' successo alle componeti della base complessa dopo la rotazione: in questo caso esse saranno espresse tramite i due nuovi vettori $\underline{\mathbf{e}}_1$' ed $\underline{\mathbf{e}}_2$'

$\underline{\mathbf{e}}'_{+1}$=-($\underline{\mathbf{e}}$'1+i$\underline{\mathbf{e}}$2)/$\sqrt{,2}$ =-[$\underline{\mathbf{e}}_1$(cos t - i sen t)+$\underline{\mathbf{e}}_2$(icos t+sen t)]/$\sqrt{,2}$

=-[$\underline{\mathbf{e}}_1$(cos t - i sen t)+i$^2\underline{\mathbf{e}}_2$(-icos t-sen t)]/$\sqrt{,2}$

=-[$\underline{\mathbf{e}}_1$(cos t - i sen t)+i$\underline{\mathbf{e}}_2$(cos t-isen t)]/$\sqrt{,2}$

$=-[\underline{e}_1 e^{-it}+i\underline{e}_2 e^{-it}]/\sqrt{2} =-1/\sqrt{2}[\underline{e}_1+i\underline{e}_2]e^{-it}=\underline{e}_{+1}e^{-it}$

$\underline{e}'_0 = \underline{e}_3=\underline{e}_3$

$\underline{e}'_{-1} = (\underline{e}1-i\underline{e}2)/\sqrt{2}=.........=\underline{e}_{-1}e^{it}$

per quanto riguarda le rotazione e' evidenti quindi il vantaggio della base complessa rispetto a quella cartesiana.

Vediamo allora come si esprime in una base generica complessa non ortogonale la lunghezza di un vettore, cioe' il prodotto scalare di un vettore per se stesso o piu' in generale il prodotto scalare tra due vettori **r** ed **s**

Se sono con componenti complesse occorre fare il prodotto del complesso coniygato di **r** per **s** che espresso tramite le componenti diventa

$\underline{r}^*\underline{s}=(\underline{e}_1{}^*r_1{}^*+\underline{e}_2{}^*r_2{}^*+\underline{e}_3{}^*r_3{}^*)(\underline{e}_1s_1+\underline{e}_2s_2+\underline{e}_3s_3)=$

$=r_1{}^*s_1(\underline{e}_1{}^*\underline{e}_1)+r_1{}^*s_2(\underline{e}_1{}^*\underline{e}_2)+r_1{}^*s_3(\underline{e}_1{}^*\underline{e}_3)+r_2{}^*s_1(\underline{e}_2{}^*\underline{e}_1)......+r_3{}^*s_3(\underline{e}_3{}^*\underline{e}_3)$

per esprimere questo prodotto posso fare una matrice fatta da tutti i prodotti scalari dei vettori fondamentali

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1{}^*\underline{e}_1 & \underline{e}_1{}^*\underline{e}_2 & \underline{e}_1{}^*\underline{e}_3 \\ \underline{e}_2{}^*\underline{e}_1 & \underline{e}_2{}^*\underline{e}_2 & \underline{e}_2{}^*\underline{e}_3 \\ \underline{e}_3{}^*\underline{e}_1 & \underline{e}_3{}^*\underline{e}_2 & \underline{e}_3{}^*\underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

quindi possiamo scrivere il prodotto scalare come

$\underline{r}^*\underline{s}= \mathbf{\hat{r}}^+ \mathbf{\hat{M}}\, \mathbf{\hat{s}} = \begin{pmatrix} r_1{}^* & r_2{}^* & r_3{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

questo e' un prodotto scalare ermitiano; definendo i prodotto scalare in questo modo il vettore al quadrato mi da un numero positivo.

La matrice $\mathbf{\hat{M}}$ si chiamo **MATRICE METRICA**

e puo' essere descritta come

$$\hat{M} = \underline{e}^+\underline{e} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1{}^* \\ \underline{e}_2{}^* \\ \underline{e}_3{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

Questa definizione deriva direttamente esprimendo il prodotto vettoriale come prodotto di matrici infatti si ha che

$\underline{r}=\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{r}}$ da cui $\underline{r}^*\underline{s} =\hat{\mathbf{r}}^+[\hat{\mathbf{e}}^+\hat{\mathbf{e}}]\, \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{r}}^+\hat{\mathbf{M}}\, \hat{\mathbf{s}}^+$

$\underline{s}=\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{s}}$

nel caso dello spazio cartesiano cioe' tridimensionale ortogonale (**i**, **j**, **k**) la matrice metrica e' una matrice unita' in cui i termini in croce si annullano

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La matrice metrica definisce lo spazio cioe' la lunghezza dei vettori della base e gli angoli tra di essi.

TRASFORMAZIONI UNITARIE

Abbiamo visto precedentemente che la matrice metrica $\hat{\mathbf{M}}$ ci definisce lo spazio quindi l'effetto di una certa operazione si ripercuote sulla mtrice metrica stessa; vediamo allora l'effetto sulla matrice metrica di un cambiamento di base

$\underline{\underline{e}} \xrightarrow{R} \underline{\underline{e}}' = \underline{\underline{e}}\hat{\mathbf{T}}$

la hermitiana di $\underline{\underline{e}}'$ cioe' $\underline{\underline{e}}'^{+}$ e' data da

$\underline{\underline{e}}'^{+} = (\underline{\underline{e}}\hat{\mathbf{T}})^{+} = \hat{\mathbf{T}}^{+}\ \underline{\underline{e}}^{+}$ nella vecchia base la matrice matrica era espressa tramite i vettori $\underline{\underline{e}}$, nella nuova base essa sara' espressa tramite i vettori $\underline{\underline{e}}'$ quindi avremo

$\hat{\mathbf{M}} = \underline{\underline{e}}^{+}\ \underline{\underline{e}}$

$\hat{\mathbf{M}}' = \underline{\underline{e}}'^{+}\underline{\underline{e}}'$

agire con l'operazione R sulla base e' lo stesso che agire con l'operazione R^{-1} sul vettore quindi

$\underline{\underline{r}}' = \hat{\mathbf{T}}^{-1}\ \underline{\underline{r}}$ da cui $\underline{\underline{r}}'^{+} = (\hat{\mathbf{T}}^{-1}\ \hat{\mathbf{r}})^{+} = \hat{\mathbf{r}}^{+}(\hat{\mathbf{T}}^{-1})^{+}$

ed analogamente per $\hat{\mathbf{s}}'$

possiamo a questo punto ricavare la relazione tra le due matrici metriche

$\hat{\mathbf{M}}' = \underline{\underline{e}}'^{+}\underline{\underline{e}}' = \hat{\mathbf{T}}^{+}\ \underline{\underline{e}}^{+}\ \underline{\underline{e}}\ \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}^{+}\ \hat{\mathbf{M}}\ \ \hat{\mathbf{T}}$

il prodotto scalare tra due vettori non deve dipendere dalla scelta della base per cui deve essere invariante, in effetti possiamo vedere che cio' si verifica infatti abbiamo visto che $\underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{s}} = \hat{\mathbf{r}}^{+}\hat{\mathbf{M}}\ \hat{\mathbf{s}}$ nella nuova base esso sara' dato da

$\hat{\mathbf{r}}'^{+}\hat{\mathbf{M}}'\ \hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{r}}^{+}(\hat{\mathbf{T}}^{-1})^{+}\hat{\mathbf{T}}^{+}\hat{\mathbf{M}}\ \hat{\mathbf{T}}\ \hat{\mathbf{T}}^{-1}\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{r}}^{+}\hat{\mathbf{M}}\ \hat{\mathbf{s}}$

come volevasi dimostrare

Si ha una base unitaria quando la matrice metrica $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{E}}$

le basi unitarie sono particolarmente convenienti quindi quando noi facciamo una trasformazione noi dobbiamo stare attenti che da una base unitaria si passi ad un'altra base unitaria allora ci chiediamo come deve essere questa trasformazione e quindi la matrice $\hat{\mathbf{T}}$ perche' questo avvenga.

Abbiamo detto che debbono essere unitarie entrambe le basi quindi deve essere

$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{E}}$ ed anche $\hat{\mathbf{M}}' = \hat{\mathbf{E}}$

ma abbiamo che $\hat{\mathbf{M}}' = \hat{\mathbf{T}}^{+}\hat{\mathbf{M}}\ \ \hat{\mathbf{T}}$ per cui $\hat{\mathbf{T}}^{+}\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{E}}$ ossia $\hat{\mathbf{T}}^{+} = \hat{\mathbf{T}}^{-1}$

cioe' la matrice di trasformazione $\hat{\mathbf{T}}$ deve essere unitaria

Noi chiameremo $\hat{\mathbf{U}}$ le matrici di questo tipo. Allora queste $\hat{\mathbf{U}}$ puo' essere associata con un certo mapping nello spazio vettoriale. Cioe' questa $\hat{\mathbf{U}}$ rappresenta una certa operazione che trasforma

$\underline{\underline{r}} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{U}}\ \hat{\mathbf{r}}$ ed anche $\underline{\underline{s}} \longrightarrow \hat{\mathbf{s}}' = \hat{\mathbf{U}}\ \hat{\mathbf{s}}$

queste trasformazioni sono particolarmente importanti perche' per esse il prodotto scalare resta uguale

$\underline{\underline{r}}^{*} \cdot \underline{\underline{s}} = \hat{\mathbf{r}}^{+}\hat{\mathbf{s}}$ $\underline{\underline{r}}' \cdot \underline{\underline{s}}' = \hat{\mathbf{r}}^{+}\hat{\mathbf{U}}^{+}\hat{\mathbf{U}}\ \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}^{+}\hat{\mathbf{r}}$

SI DEFINISCONO TRASFORMAZIONI UNITARIE QUELLE TRASFORMAZIONI DI SIMILARITA' **T**,^-1**R**,^**T**,^ PER LE QUALI **T**,^-1= **T**,^+

11